§ Estática dos corpos rígidos

As eqs. de movimento de um corpo rígido são:

$$M\ddot{\vec{R}} = \sum_i \vec{F}_i^{(e)}, \qquad (1)$$

$$\frac{d\vec{L}^{(0)}}{dt} = \sum_i \vec{N}_i^{(0)(e)}, \qquad (2)$$

onde o movimento do CM em $\vec{R}$ é determinado pela soma das forças externas aplicadas sobre o corpo. A eq. (2) descreve os graus de liberdade de rotação em relação a um ponto arbitrário 'O'. Este movimento depende do torque externo total em relação ao mesmo ponto 'O'.

Em particular, se o corpo estiver em repouso, temos que:

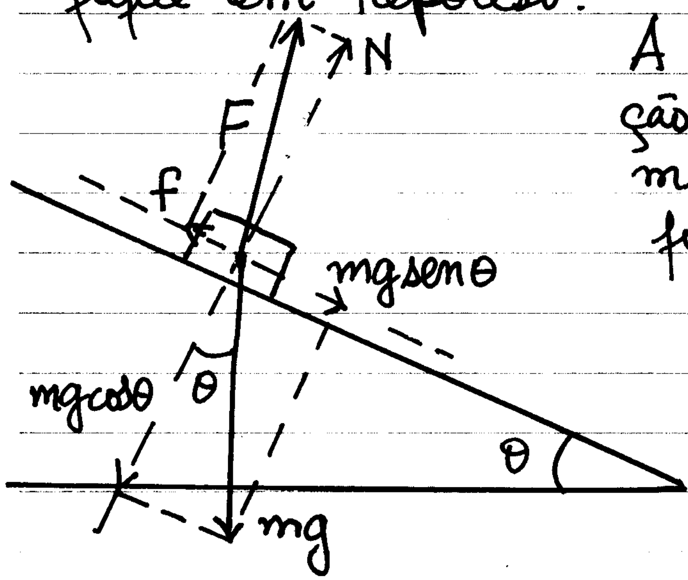
$$\sum_i \vec{F}_i^{(e)} = 0, \qquad (1')$$

$$\sum_i \vec{N}_i^{(e)} = 0. \qquad (2')$$

As condições (1') e (2') são necessárias, mas não suficientes, pois o corpo poderia executar translação e rotação uniforme. Porém, se a condição inicial for do corpo em repouso, ele permanecerá nesse estado se as condições (1') e (2') forem satisfeitas.

O estudo das diversas configurações onde isso acontece é chamado de 'Estática'.

Ver exemplo do plano inclinado. Encontrar a condição de equilíbrio para que um corpo fique em repouso.



A componente $\vec{f}$ de $\vec{F}$ (reação do plano) é oposta ao movimento e define o coeficiente de atrito por:

$$f = \mu N,$$

onde N é a força normal da reação.

Em equilíbrio (dependerá da inclinação através de θ):

$$N - mg\cos\theta_c = 0$$

$$\mu N - \operatorname{sen}\theta_c \cdot mg = 0$$

Obtemos

$$\mu \cancel{mg} \cos\theta_c = \cancel{mg}\, \cancel{\operatorname{sen}}\theta_c$$

com

$$\boxed{\mu = \tan\theta_c}$$

Def Força Resultante

Se um sistema de forças $\vec{F}_i$ que age nos pontos $\vec{r}_i$ de um corpo, for equivalente a uma única força $\vec{F}$ aplicada no ponto $\vec{r}$, ela é chamada Resultante do sistema $\{\vec{F}_i\}$.

Para $\vec{F}$ ser uma força resultante devemos ter:

$$\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i , \qquad (A)$$

$$(\vec{r}-\vec{r}_0)\times\vec{F} = \sum_i (\vec{r}_i-\vec{r}_0)\times\vec{F}_i , \qquad (B).$$

(A) significa que $\vec{F}$ é a resultante da soma vetorial das forças $\vec{F}_i$;

(B) significa que o torque em relação a um ponto qualquer $\vec{r}_0$ de $\vec{F}$ deve ser igual à soma dos torques do sistema $\{\vec{F}_i, \vec{r}_i\}$.

Um exemplo importante de resultante de um sistema de forças é o caso das forças gravitacionais:

Temos: $\vec{F}_i = m_i\vec{g}$

e para a soma $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_i = \left(\sum_i m_i\right)\vec{g} = M\vec{g}$,

onde $M = \sum m_i$ é a massa total.

Calculamos agora o torque tomando um ponto O qualquer como origem:

$$\vec{N}_i^{(0)} = \vec{r}_i \times m_i \vec{g} \ ,$$

e para o torque total temos

$$\vec{N}^{(0)} = \sum_i \vec{r}_i \times m_i \vec{g} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{g}$$

$$= M\vec{R} \times \vec{g} = \vec{R} \times M\vec{g} = \vec{R} \times \vec{F} \ ,$$

onde $\vec{R}$ é a coordenada do CM relativa ao ponto O.

A resultante é $\vec{F} = M\vec{g}$ agindo no centro de Massa (passa a ser Centro de Gravidade).

Rotação em torno de um eixo fixo

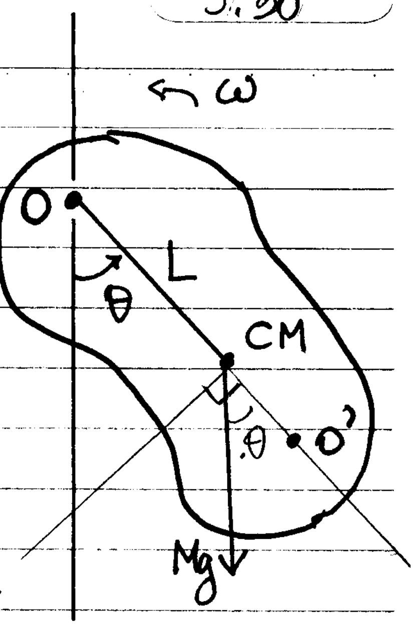
Neste caso simples interessa apenas o momento de inércia I em relação ao eixo de rotação. O sistema possui apenas um grau de liberdade, que é o ângulo de rotação θ. O eixo de rotação está fixo no SRI (lab) e também no sistema rotatório:

$$\dot{\theta} = \omega$$

Momento angular, em relação ao eixo:

$$L = I\dot{\theta} = I\omega$$

Ex: Pêndulo composto



É um corpo rígido suspenso e livre para rodar em torno de um eixo, que admitimos que não passa pelo CM, sendo L a distância entre o eixo e o CM.

Seja I o momento de inércia relativo ao eixo que passa pelo ponto O.

$$\frac{d}{dt} L = I \frac{d}{dt}\dot{\theta} = I\ddot{\theta} = I\dot{\omega} = N^{(o)} =$$

$$= -MgL \operatorname{sen}\theta$$

$N^{(o)}$ é o torque da Resultante Mg relativo ao ponto O. Obtemos a equação:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{MgL}{I}\right) \operatorname{sen}\theta = 0} \qquad (*)$$

▸ **Def. Raio de Giração, Λ**

É uma distância efetiva tal que:

$$I = M\Lambda^2,$$

como se o momento de inércia fosse calculado para uma partícula de massa M, distante Λ do eixo.

A equação do pêndulo fica então:

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{gL}{\Lambda^2}\right) \operatorname{sen}\theta = 0$$

O comprimento $(\Lambda^2/L) \equiv \ell$, seria o comprimento efetivo de um pêndulo simples que oscilaria com a mesma freqüência. Note que Λ é a média geométrica de 'L' e 'ℓ':

$$\Lambda = \sqrt{\ell L},$$

portanto, se $\Lambda > L$, temos

$$L < \Lambda < \ell \Rightarrow \ell > L,$$

e viceversa. Os pontos (O, O') que definem L e ℓ são conjugados, isto é, eles podem ser intercambiados.

Conhecidos os momentos de inércia em relação a CM, podemos facilmente calcular I usando o teorema do eixo paralelo:

$$I \equiv I^{(O)} = I^{(CM)} + ML^2.$$

A eq. (*) para o pêndulo composto pode ser integrada por quadraturas. Note que para pequenas oscilações, $\theta \ll 1$, temos:

$$\operatorname{sen}\theta \approx \theta ,$$

resultando em:

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0 ,$$

com $\omega_0^2 = \frac{MgL}{I} = \frac{g}{\ell}$. Esta é uma eq. de oscilador harmônico com freqüência ω_0. As soluções para este caso são:

$$\theta = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \varphi_0) ,$$

onde (θ_0, φ_0) são determinados pelas condições iniciais. Para o caso geral dado por $(*)$, usamos a conservação da energia, em analogia ao movimento em 1-dim.

$$E = \frac{1}{2} I \dot{\theta}^2 - MgL\cos\theta ,$$

onde consideramos o ponto $\underline{O}$ como referência para a energia potencial:

$$V(\theta) = -MgL\cos\theta .$$

Note que:

$$N^{(o)} = -\frac{\partial V}{\partial \theta}(\theta) = -MgL\operatorname{sen}\theta ,$$

e $V(\theta)$ pode ser considerado como o 'potencial do torque). Escrevendo: $I = M\Lambda^2$

$$E = \frac{M}{2}\left(\Lambda^2\dot{\theta}^2 - 2gL\cos\theta\right)$$

Obtemos:

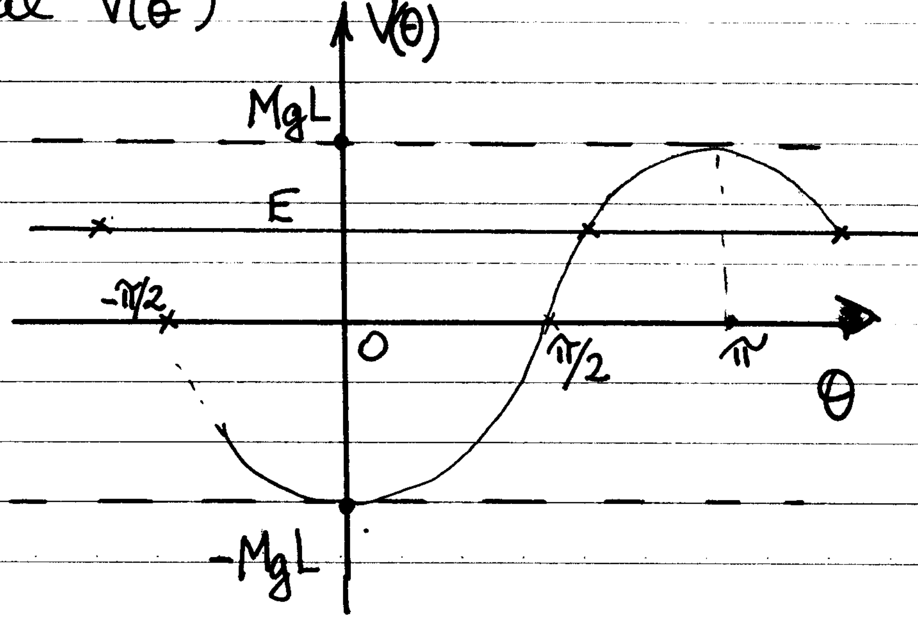
$$\dot{\theta}^2 = \frac{1}{\Lambda^2}\left(\frac{2E}{M} + 2gL\cos\theta\right)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\pm}{\Lambda}\sqrt{\frac{2E}{M} + 2gL\cos\theta}$$

ou

$$dt = \frac{\pm\Lambda\, d\theta}{\sqrt{\frac{2E}{M} + 2gL\cos\theta}}.$$

O sinal $\pm$ define o ramo de velocidade angular positiva ou negativa na oscilação para o potencial $V(\theta)$



Vemos que temos múltiplos pontos de retorno, dependendo das condições iniciais. Para $-MgL < E < MgL$, a condição de ponto de retorno é satisfeita por:

$$E = -MgL\cos\chi$$

$$\Rightarrow \frac{2E}{M} = -2gL\cos\chi \Rightarrow \text{obtemos:}$$

$$dt = \frac{\pm\Lambda \, d\theta}{\sqrt{2gL(\cos\theta - \cos\chi)}}$$

$$= \frac{\pm\, d\theta}{\sqrt{\frac{2gL}{\Lambda^2}(\cos\theta - \cos\chi)}}$$

e introduzindo o comprimento equivalente 'ℓ':

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{2g}{\ell}\right)^{1/2} dt = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\pm\, d\theta}{\sqrt{\cos\theta - \cos\chi}}$$

Usando a identidade: $\cos\theta = \cos^2\frac{\theta}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2} = 1 - 2\operatorname{sen}^2\theta/2$

$$\int_{t_0}^{t} 2\left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} dt = \int_{\theta_0}^{\theta}\frac{\pm\, d\theta}{\left[\operatorname{sen}^2\frac{\chi}{2} - \operatorname{sen}^2\frac{\theta}{2}\right]^{1/2}}$$

Mudança de variável:

$$a \equiv \operatorname{sen}\frac{\chi}{2} \quad , \quad \operatorname{sen}\varphi \equiv \frac{\operatorname{sen}\theta/2}{\operatorname{sen}\chi/2} = \frac{\operatorname{sen}\theta/2}{a}$$

$$\frac{1}{2}\,d\theta\,\cos\theta/2 = a\cos\varphi\, d\varphi \,,$$

mas como

$$d\theta = 2\left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} dt\,\operatorname{sen}\frac{\chi}{2}\left(1 - \frac{\operatorname{sen}^2\theta/2}{\operatorname{sen}^2\chi/2}\right)^{1/2}$$

resulta:

$$\cancel{a}\,\cancel{\cos\varphi}\, d\varphi = \cancel{2}\left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} dt\,\cancel{\operatorname{sen}\frac{\chi}{2}}\,\cancel{\left(1-\operatorname{sen}^2\varphi\right)^{1/2}} \cdot \frac{1}{\cancel{2}}\cos\theta/2$$

$$d\varphi = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} dt\,\sqrt{1-a^2\operatorname{sen}^2\varphi}$$

e integrando:

$$\int_{t_0}^{t}\left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} dt = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{(\pm)\,d\varphi}{\sqrt{1-a^2\operatorname{sen}^2\varphi}} = \left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} t \,,$$

com $t_0 = 0$. A integral

$$K(\varphi/a) = \int_{\varphi_0}^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-a^2\operatorname{sen}^2\varphi}}$$

é uma função elíptica de 1º. tipo incompleta.

Se o parâmetro $a = \text{sen}\,\chi/2$ for pequeno, o denominador pode ser expandido em série e integrado termo a termo:

$$(1-a^2\text{sen}^2\varphi)^{-1/2} = 1 + \frac{1}{2}a^2\text{sen}^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a^4\text{sen}^4\varphi + \ldots$$

Para um período completo, $\varphi = 2\pi$ no limite superior de integração (considerando $\varphi_0 = 0$):

$$\left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} T = \int_0^{2\pi} d\varphi \left(1 + \frac{1}{2}a^2\text{sen}^2\varphi + \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}a^4\text{sen}^4\varphi \ldots\right)$$

Em ordem mais baixa obtemos:

$$\left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} T^{(0)} = 2\pi \Rightarrow T^{(0)} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}},$$

não depende da amplitude e
é o período para pequenas oscilações. Na ordem seguinte:

$$\left(\frac{g}{\ell}\right)^{1/2} T^{(1)} = \left[\varphi + \frac{1}{2}a^2\left(\frac{\varphi}{2} - \frac{\text{sen}\,2\varphi}{4}\right)\right]_0^{2\pi}$$

$$= 2\pi\left(1 + \frac{a^2}{4}\right) \Rightarrow$$

$$T^{(1)} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}\left(1 + \frac{a^2}{4}\right).$$

A solução exata para o período do pêndulo composto é:

$$T = \left(\frac{\ell}{g}\right)^{1/2} K(2\pi|a)$$

Temos que $K(2\pi|a) = 4\,K(\frac{\pi}{2}|a)$

e a expansão em série da função elíptica completa:

$$K(\tfrac{\pi}{2}|a) = \frac{\pi}{2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 a^4 + \cdots\right\}$$

$$= \frac{\pi}{2}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(2n-1)!!}{2^n\, n!}\right)^2 a^{2n}$$

, Ref: Abramowitz e Stegun, "Handbook of Mathematical Functions", Dover, p. 589

de onde resulta que:

$$T = 2\pi\left(\frac{\ell}{g}\right)^{1/2}\left\{1 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 a^2 + \left(\frac{1\cdot 3}{2\cdot 4}\right)^2 a^4 \cdots\right\}$$

$a = \operatorname{sen} \chi/2$ depende da amplitude da oscilação por

$$E = -MgL\cos\chi$$

$$= -MgL\left(1 - 2\operatorname{sen}^2 \chi/2\right)$$

$$= -MgL + 2MgL\,a^2$$

$$a^2 = \frac{E + MgL}{2MgL}.$$

∎